



Critical Depth Estimation in a Channel With Trapezoidal Cross-Section: Proposed Equations, Evaluation of Accuracy and Performance

Ghorban Mahtabi¹, Hadi Arvanaghi^{*2}

1- Associate Professor, Department of Water Engineering, Faculty of Agriculture, University of Zanjan, Zanjan, Iran.

2- Associate Professor, Department of Water Engineering, Faculty of Agriculture, University of Tabriz, Tabriz, Iran.

Received: 2026/02/20

Accepted: 2026/05/31

Revised: 2026/06/10

Published online: 2026/06/20

*Corresponding Author's Email: arvanaghi.hadi@gmail.com

ARTICLE INFO

ABSTRACT

Keywords:

Critical depth,
Power series,
Relative error,
Trapezoidal channel
Two triangle method

Estimating the critical depth in a trapezoidal channel, which is widely used in various water conservation and distribution networks, has always been of interest to hydraulic engineering researchers. The common method for calculating the critical depth of a trapezoidal channel is the trial and error method, but today, explicit solutions have been proposed as a powerful and suitable alternative method. In this study, using the dimensional analysis method, different forms of mathematical series and also the two triangle method, equations for estimating the critical depth of a channel with trapezoidal cross-section were proposed and their accuracy was evaluated in comparison with the equations of previous researchers. In extracting the proposed equations, the simple form with fewer repetitions of the mathematical series was considered. A wide range of geometric and hydraulic data of trapezoidal cross-sections at critical depth conditions were used. The accuracy and performance of the proposed and existing equations were evaluated using the absolute of relative error (ARE) and the efficiency index (NSE). The results showed that equations A, B and E with mean absolute of relative error equal to 0.314, 0.173 and 0.078 percent respectively have the best performance in estimating the critical depth of a channel with a trapezoidal cross-section. Also, the accuracy of the proposed equations was evaluated in comparison with the existing equations and the results were reported.

Introduction

One of the most important hydraulic parameters in the analysis of open channel flows, which used in determining the flow pattern, calculating specific energy, analyzing flow stability, designing water transfer structures, and managing flow regime transition conditions is the critical depth (Akan & Iyer, 2021). In most irrigation and drainage network projects, trapezoidal canals are widely used due to their feasibility, good stability, and hydraulic efficiency (Das, 2007). The critical depth equation in trapezoidal canals is a nonlinear and complex equation due to the cross-sectional geometry, which cannot be solved explicitly and requires the solution of related nonlinear equations. In recent years, the development of explicit solutions for determining critical depth has been proposed as a powerful method and a suitable alternative to numerical methods. These solutions are usually extracted using analytical methods, mathematical approximations, nonlinear regression, dimensional relations, or meta-heuristic algorithms, and research results show that explicit solutions, in addition to high speed, have acceptable accuracy and can provide

How to cite:

Mahtabi, G. Arvanaghi, H. *Critical Depth Estimation in a Channel With Trapezoidal Cross-Section: Proposed Equations, Evaluation of Accuracy and Performance*. Journal of Hydraulics and Water Science, 36 (1):1-10. <https://doi.org/10.22034/hws.2026.71640.1049>



This is an open-access article under the CC BY NC license
(<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)



engineers' goals in practical designs and rapid analyses and become a suitable alternative to conventional numerical methods. In the present study, by examining different forms of mathematical equations and also using the dimensional analysis technique and the two triangle method (Arvanaghi et al., 2015), new equations for determining the critical depth of trapezoidal channels were presented in a simpler form and with high accuracy, and the results were compared and evaluated with existing relations.

Materials and Methods

In trapezoidal channels, the critical Froude number equation to calculate the critical depth is $\frac{\alpha Q^2 T_c}{g A_c^3} = 1$ (French, 1987). By substituting the A and T relations and changing the variable $\lambda = (m y_c)/b$ in the critical depth equation, and by changing the variable $\phi = \frac{Q m^{1.5}}{\sqrt{g/a} b^{2.5}}$ and substituting it into the critical Froude number equation, the equations ϕ and λ are obtained. The equation λ , which is 6th degree equation, cannot be solved analytically, but with the help of equation ϕ and generating ϕ values for different λ in the applicable range, new equations can be presented to calculate the value of λ and consequently the critical depth. With using the related software and the generated values of ϕ for λ , and considering the applicable range of Side slope (m) and Bottom width (b) values, it is possible to examine different forms of equations such as linear, power, logarithmic, etc. and obtain the relevant coefficients of the equations with appropriate accuracy. To determining the accuracy of equations, two parameters including the efficiency index (NSE) and the absolute of the relative error (ARE).

Results and Discussion

Examining the form of equation 13 (combination of parameter ϕ with specific powers based on dimensional analysis) showed that equation A had the highest accuracy (with an average absolute value of relative error of 0.314 percent and an efficiency index of 0.995) with 3 iterations of parameter ϕ and specific powers. In this equation, the maximum observed error was calculated to be 1.738 percent. Next, the power series (equation 14 as a combination of the parameter ϕ with the power and unknown coefficients) was examined, and in the case of 3 iterations of the parameter ϕ , equation B with an average absolute value of the relative error of 0.173 percent, an efficiency index of 0.997, and a maximum relative error of 1.611 percent was introduced as the best equation. Examining the different iterations of the series of equation 15 showed that in the case of two iterations of the series, equation D was obtained with an average absolute value of the relative error equal to 0.294 percent, an efficiency index equal to 0.998, and a maximum relative error equal to 2.489 percent. In the following, the three-repetition case of the series was also examined, and the equation E was extracted with an average absolute value of the relative error equal to 0.078 percent, an efficiency index equal to 0.999, and a maximum relative error equal to 0.988 percent, which indicates a significant reduction in the error in the equation E and was introduced as the best relation of this series. Comparing the accuracy of the presented series of equations A to E shows that equation E with the lowest average absolute value of relative error and maximum relative error and the highest value of efficiency index is the best equation for estimating the critical depth of the trapezoidal channel. In the results of the two triangle method with the general form of equation 20, it was observed that the semi-logarithmic equation F with the simple form and the average absolute value of the relative error, efficiency index, and maximum relative error equal to 0.662 percent, 0.985 percent, and 0.922 percent, respectively, has a suitable accuracy in estimating the critical depth of the trapezoidal channel. Comparing the performance of the equations presented by previous researchers shows that the Vatankhah (2013) equation has the highest accuracy among the relations presented and studied, with an average absolute value of the relative error of 0.010 percent, an efficiency index of 0.999, and a maximum relative error of 0.029 percent. Wang's (1998) equation in the form of three series repetitions with an average absolute magnitude of relative error equal to 0.032 percent, an efficiency index equal to 0.999, and a maximum relative error equal to 0.118 percent ranks second in performance next to Vatankhah's (2013) equation. Chen's (2025) equation is also in third rank with an average absolute magnitude of relative error equal to 0.106 percent, an efficiency index equal to 0.998, and a maximum relative error equal to 0.180 percent.

Conclusion

In this study, to calculate the critical depth in a trapezoidal channel, various equations were proposed using dimensional analysis, mathematical series, and the two triangle method, and their accuracy and performance were evaluated in comparison with existing equations of researchers. In extracting new equations and evaluating existing equations, an attempt was made to use equations with minimal repetition of the mathematical series, and the results were compared with the help of evaluation indices including the average absolute value of the relative error, the efficiency index, and the maximum relative error. Among the proposed equations in this study, equations A, B, and E with the average absolute value of relative error equal to 0.314, 0.173, and 0.078 percent, respectively, and also the efficiency index value equal to 0.995, 0.997, and 0.999, respectively, showed good performance in estimating the critical depth of the trapezoidal channel. Among the previous researchers' equations, Vatankhah (2013) equation with an average absolute magnitude of relative error of 0.010 percent and an efficiency index of 0.999 had the best performance in estimating critical depth, and Wang (1998) and Chen (1998) equations with an average absolute magnitude of relative error of 0.032 and 0.106, respectively, ranked second and third. The E equation, proposed in this study with the form of three power series iterations, also had a competitive performance compared to the equations of previous researchers, especially Chen's (2025) equation, with an average absolute value of the relative error of 0.078 percent. The results of this research show that examining different forms of mathematical power series can be of great help in extracting critical depth estimation equations with a simple form and appropriate accuracy.

Keywords: Critical depth, Trapezoidal channel, Two triangle method, Power series, Relative error



تخمین عمق بحرانی در کانال‌های دوزنقه‌ای: روابط پیشنهادی، ارزیابی دقت و عملکرد

قربان مهتابی^۱، هادی ارونقی^{۲*}

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۱۲/۰۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۳/۱۰
تاریخ ویرایش: ۱۴۰۵/۰۳/۲۰ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۵/۰۳/۳۰
۱- دانشیار، گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران.
۲- دانشیار گروه مهندسی آب دانشکده کشاورزی دانشگاه تبریز، تبریز، ایران.
* نویسنده مسئول: arvanaghi.hadi@gmail.com

چکیده

محاسبه عمق بحرانی در کانال‌های دوزنقه‌ای که به‌طور گسترده در شبکه‌های انتقال و توزیع آب مورد استفاده قرار می‌گیرند، همواره مورد توجه محققان مهندسی هیدرولیک بوده است. روش متداول برای محاسبه عمق بحرانی در این کانال‌ها، روش سعی و خطا است؛ اما امروزه راه‌حل‌های صریح به‌عنوان روشی توانمند و جایگزینی مناسب مطرح شده‌اند. در این تحقیق، با استفاده از آنالیز ابعادی، فرم‌های مختلف سری‌های ریاضی و روش دو مثلث، روابطی برای تخمین عمق بحرانی کانال‌های دوزنقه‌ای ارائه و دقت آن‌ها در مقایسه با روابط موجود ارزیابی شد. در استخراج روابط پیشنهادی، فرم ساده با تعداد تکرار کمتر سری ریاضی مدنظر قرار گرفت. محدوده وسیعی از داده‌های هندسی و هیدرولیکی مقطع دوزنقه‌ای در شرایط عمق بحرانی استفاده شد. دقت و عملکرد روابط پیشنهادی و موجود با استفاده از شاخص قدر مطلق خطای نسبی (ARE) و شاخص کارایی (NSE) ارزیابی گردید. نتایج نشان داد که روابط A، B و E با متوسط قدر مطلق خطای نسبی به ترتیب برابر ۰/۳۱۴، ۰/۱۷۳ و ۰/۰۷۸ درصد، بهترین عملکرد را در تخمین عمق بحرانی کانال‌های دوزنقه‌ای دارند. همچنین دقت روابط پیشنهادی در مقایسه با روابط موجود ارزیابی گردید و نتایج حاصل گزارش شد.

کلمات کلیدی: عمق بحرانی، کانال دوزنقه‌ای، روش دو مثلث، سری توانی، خطای نسبی

١- مقدمه

یکی از مهم‌ترین پارامترهای هیدرولیکی در تحلیل جریان‌های کانال‌های روباز، عمق بحرانی است که در تعیین الگوی جریان، محاسبه انرژی مخصوص، تحلیل پایداری جریان، طراحی سازه‌های انتقال آب و مدیریت شرایط تغییر رژیم جریان کاربرد دارد (Akan & Iyer, 2021). در اغلب پروژه‌های شبکه‌های آبیاری و زهکشی، کانال‌های دوزنقه‌ای به دلیل قابلیت اجرا، پایداری مناسب و کارایی هیدرولیکی، به‌طور گسترده استفاده می‌شوند (Das, 2007). معادله عمق بحرانی در کانال‌های دوزنقه‌ای به دلیل هندسه مقطع، یک رابطه غیرخطی و پیچیده است که به‌صورت صریح قابل حل نیست و نیازمند حل معادلات غیرخطی مرتبط است. این معادلات معمولاً فاقد راه‌حل تحلیلی مستقیم بوده و حل آن‌ها نیازمند روش‌های عددی تکراری (سعی و خطا) است. با وجود دقت بالای روش‌های عددی مانند تکرار نیوتن-رافسون، این روش‌ها در کاربردهای مهندسی روزمره، طراحی‌های سریع، شبیه‌سازی‌های گسترده و ابزارهای محاسباتی کم‌حجم، با موانعی نظیر نیاز به مراحل تکرار و زمان بر بودن، حساسیت نسبت به انتخاب مقدار اولیه و احتمال واگرایی مواجه هستند (Salmasi, 2020).

در سال‌های اخیر، گسترش راه‌حل‌های صریح^۱ برای تعیین عمق بحرانی، به‌عنوان روشی توانمند و جایگزین مناسب برای روش‌های عددی مطرح شده است. این راه‌حل‌ها معمولاً با استفاده از روش‌های تحلیلی، تقریب‌های ریاضی، رگرسیون غیرخطی، روابط ابعادی، یا الگوریتم‌های فراابتکاری استخراج می‌شوند. نتایج تحقیقات نشان می‌دهد که راه‌حل‌های صریح علاوه بر سرعت بالا، دقت قابل قبولی داشته و می‌توانند اهداف مهندسان را در طراحی‌های عملی و تحلیل‌های سریع برآورده کرده و جایگزین مناسبی برای روش‌های عددی متداول باشند. با وجود تلاش‌های انجام‌شده، همچنان نیاز به ارائه روابط صریح با دقت بیشتر، دامنه کاربرد وسیع‌تر، حساسیت کمتر نسبت به پارامترهای هندسی و توانایی استفاده در شرایط متنوع هیدرولیکی احساس می‌شود. از این‌رو، توسعه و ارزیابی راه‌حل‌های صریح ساده با دقت مناسب برای تعیین عمق بحرانی در کانال‌های دوزنقه‌ای، همچنان یک موضوع مهم در تحقیقات مهندسی آب و هیدرولیک کانال‌ها است.

Swamee (1993) برای تعیین عمق بحرانی کانال‌های دوزنقه‌ای در محدوده $0 \leq \lambda = \frac{my_c}{b} \leq 3$ ، عمق بحرانی کانال دوزنقه‌ای، m شیب دیواره جانبی و b عرض کف کانال) رابطه‌ای به فرم زیر ارائه کرد که حداکثر خطای آن حدود ۲/۲ درصد بود.

$$\lambda = (\varphi^{-1.4} + 0.747\varphi^{-0.84})^{-0.476} \quad (1)$$

که در این رابطه $\alpha, \varphi = \frac{Qm^{1.5}}{\sqrt{g/ab^{2.5}}}$ ضریب تصحیح انرژی Q دبی جریان و g شتاب ثقل است.

Wang (1998) با کاربرد تئوری تکرار، رابطه تحلیلی صریح زیر را برای تعیین عمق بحرانی کانال دوزنقه‌ای ارائه کرد. این رابطه با وجود دقت مناسب (حداکثر خطا برابر ۱/۰۴۸ درصد) به دلیل پیچیدگی رابطه، کاربرد دشواری دارد.

$$\lambda = \left((1 + 4\varphi^{\frac{2}{3}})^{0.2} (1 + 4\varphi^{\frac{2}{3}})^{0.1/6} (1 + 4\varphi^{\frac{2}{3}})^{1/6} (1 + 4\varphi^{\frac{2}{3}})^{0.5} \right) \quad (\Upsilon)$$

فرم‌های ساده‌تر این رابطه نیز ارائه شده است که فرم دو و سه تکرار آن به صورت زیر است.

$$\lambda = (1 + 4\varphi^{\frac{2}{3}}(1 + 4\varphi^{\frac{2}{3}})^{0.2})^{0.5} \quad (3)$$

$$\lambda = (1 + 4\varphi^{\frac{2}{3}}(1 + 4\varphi^{\frac{2}{3}}(1 + 4\varphi^{\frac{2}{3}})^{0.2})^{1/6})^{0.5} \quad (f)$$

Vatankhah (2011) و Vatankhah & Kouchakzadeh (2007) و Easa در تحقیقات خود روابطی برای محاسبه عمق بحرانی کانال دوزنقه‌ای ارائه کردند که در محدوده $0 \leq \lambda = \frac{m_{yc}}{b} \leq 3$ از دقت مناسبی برخوردار بودند. Vatankhah (2013) نیز با کمک آنالیز رگرسیونی، رابطه‌ای به صورت زیر با دقت مناسب (6×10^{-6} درصد) در محدوده $0.062 \leq \lambda = \frac{m_{yc}}{b} < 12$ ارائه کرد.

$$\lambda = (1 + 4.644\varphi^{2/3}(1 + 0.655\varphi^{0.694})^{0.374})^{0.432} \quad (\Delta)$$

Varandili et al. (2019) با کمک سری تابع نمایی و کاربرد
تئوری تکرار، رابطه‌ای مشابه رابطه Wang (1998) به فرم زیر با دقت
مناسب برای تعیین عمق بحرانی ارائه کردند.

$$\lambda = (1 + 4\varphi^{\frac{2}{3}}(1 + 4\varphi^{\frac{2}{3}}(1 + 4\varphi^{\frac{2}{3}}(1 + 4\varphi^{\frac{2}{3}}(1 + \dots)^{1/6})^{1/6})^{1/6})^{0.5})^{1/6} \quad (8)$$

این رابطه همانند رابطه Wang (1998) فرمی پیچیده دارد و فرم‌های با تکرار کمتر نیاز به ارزیابی و بررسی دارند.

Chen (2025) ضمن ارزیابی دقت روابط محققان مختلف، رابطه‌ای مشابه رابطه Vatankhah (2013) به فرم زیر را در محدوده $0.0008 \leq \lambda = \frac{my_c}{b} \leq 21.35$ و با دقت مناسب (متوسط خطای نسبی $\pm 0.915\%$ در صد)، ارائه کرد.

$$\lambda = (1 + 3.901\varphi^{2/3}(1.433 + 4.084\varphi^{2/3})^{0.3175})^{0.4566} \quad (\text{V})$$

در تحقیق حاضر با بررسی فرم‌های مختلف روابط ریاضی و همچنین با استفاده از تکنیک آنالیز ابعادی و روش دو مثلث

$$\lambda = a_1 \varphi^{\frac{1}{3}} + a_2 \varphi^{\frac{2}{5}} + a_3 \varphi^{\frac{1}{2}} + a_4 \varphi^{\frac{2}{3}} + a_0 \quad (20)$$

با کمک نرم‌افزارهای مرتبط و مقادیر تولید شده φ به‌ازای λ می‌توان ضرائب رابطه فوق را با دقت مناسب در بازه $\varphi > 0$ به‌دست آورد. در این فرم، ترکیبی از حالت‌های چهار، سه یا دومتغیره رابطه بررسی شد که در بخش نتایج و بحث به تفصیل به آن‌ها پرداخته شده است. ازطرفی، می‌توان با در نظر گرفتن سری ریاضی توانی به صورت رابطه زیر اقدام کرد:

$$\lambda = a_1 \varphi^{n_1} + a_2 \varphi^{n_2} + a_3 \varphi^{n_3} + a_4 \varphi^{n_4} + \dots + a_0 \quad (21)$$

ترکیبی از حالت‌های دو، سه، چهار و چندمتغیره با کمک نرم‌افزارهای مرتبط و مقادیر تولید شده $\varphi > 0$ به‌ازای λ بررسی شد که در بخش نتایج و بحث به تفصیل به آن‌ها پرداخته شده است. همچنین حالت بدون پارامتر a_0 نیز بررسی شد. در کنار دو روش ذکر شده برای تولید روابط ساده با دقت مناسب جهت محاسبه λ و در نتیجه عمق بحرانی در بازه $\varphi > 0$ ، فرم‌های مختلف روابط قابل بررسی ارزیابی گردید که رابطه با فرم زیر پیشنهاد گردید:

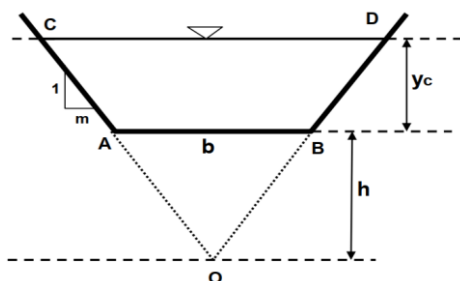
$$\lambda = (a_1 + \varphi^{n_1}) \times (a_2 + \varphi^{n_2}) \times (a_3 + \varphi^{n_3}) \times (a_4 + \varphi^{n_4}) + \dots + a_0 \quad (22)$$

لازم به ذکر است که در ارزیابی روابط، فرم ساده روابط با تعداد تکرار کم سری و دقت بالا به‌عنوان معیار انتخاب در نظر گرفته شد. در روش دیگر (روش دو مثلث) مطابق شکل ۱، عمق بحرانی کانال دوزنقه‌ای ABCD (y_c) با در نظر گرفتن رابطه عمق بحرانی کانال مثلثی AOB (h) محاسبه می‌شود. مطابق این شکل، در مثلث AOB با فرض برقراری شرایط عمق بحرانی h داریم:

$$b = 2mh \quad \text{یا} \quad h = \frac{b}{2m} \quad (23)$$

با در نظر گرفتن دبی Q' برای مثلث AOB و براساس رابطه عمق بحرانی کانال مثلثی داریم:

$$h = \left(\frac{2\alpha Q'^2}{gm^2} \right)^{1/5} \gg Q' = \frac{\sqrt{g} b^{2.5}}{8m^{1.5}} \quad (24)$$



شکل ۱- پارامترهای هندسی و هیدرولیکی در مقطع بحرانی
Fig 1. Geometric and hydraulic parameters at the critical section

(Arvanaghi et al., 2015)، روابطی برای تعیین عمق بحرانی کانال‌های دوزنقه‌ای با فرم ساده‌تر و دقت بالا ارائه شد و نتایج حاصل با روابط موجود مقایسه و ارزیابی شد.

۲- مواد و روش‌ها

در کانال‌های دوزنقه‌ای، رابطه عدد فرود بحرانی برای محاسبه عمق بحرانی به صورت زیر است (French, 1987):

$$\frac{\alpha Q^2 T_c}{g A_c^3} = 1 \quad (8)$$

در این رابطه $A_c = y_c(b + m y_c)$ و $T_c = b + 2m y_c$ ضریب تصحیح انرژی، Q دبی جریان و g شتاب ثقل است. با فاکتورگیری از b داریم:

$$T_c = b + 2m y_c = b(1 + 2\frac{m y_c}{b}) \quad (9)$$

$$A_c = y_c(b + m y_c) = b y_c(1 + \frac{m y_c}{b}) \quad (10)$$

با تغییر متغیر $\lambda = \frac{m y_c}{b}$ در روابط فوق داریم:

$$T_c = b(1 + 2\lambda) \quad \text{and} \quad A_c = b y_c(1 + \lambda) \quad (11)$$

با جایگذاری روابط فوق در رابطه عمق بحرانی داریم:

$$\frac{\alpha Q^2(1+2\lambda)}{g b^2 y_c^3(1+\lambda)^3} = 1 \quad (12)$$

با در نظر گرفتن $\lambda^3 = (\frac{m y_c}{b})^3$ و در جایگذاری $y_c^3 = (\frac{b \lambda}{m})^3$ در رابطه فوق داریم:

$$\frac{\alpha Q^2 m^3(1+2\lambda)}{g b^5 \lambda^3(1+\lambda)^3} = 1 \quad (13)$$

در نهایت با تغییر متغیر $\varphi = \frac{Q m^{1.5}}{\sqrt{g} a b^{2.5}}$ و جایگذاری آن در رابطه فوق، روابط زیر برای محاسبه λ و φ حاصل می‌شود:

$$\varphi^2 = \frac{\lambda^3(\lambda+1)^3}{2\lambda+1} \quad (14)$$

یا

$$\lambda^6 + 3\lambda^5 + 3\lambda^4 + \lambda^3 - 2\varphi^2\lambda - \varphi^2 = 0 \quad (15)$$

این معادله درجه ۶ به صورت تحلیلی قابل حل نیست؛ اما با کمک رابطه (۱۴) و تولید مقادیر φ به‌ازای λ های مختلف در بازه کاربردی، می‌توان روابطی برای محاسبه مقدار λ و در نتیجه عمق بحرانی ارائه داد. با کمک تئوری آنالیز ابعادی برای تولید فرم کلی روابط محاسبه λ ، با توجه به رابطه (۱۴) می‌توان نوشت:

$$\lambda^6 \propto \varphi^2 \gg \lambda \propto \varphi^{\frac{1}{5}} \quad (16)$$

$$\lambda^5 \propto \varphi^2 \gg \lambda \propto \varphi^{\frac{2}{5}} \quad (17)$$

$$\lambda^4 \propto \varphi^2 \gg \lambda \propto \varphi^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

$$\lambda^3 \propto \varphi^2 \gg \lambda \propto \varphi^{\frac{2}{3}} \quad (19)$$

در نهایت، فرم رابطه λ را می‌توان به صورت زیر ارائه کرد:

ارائه شده در این تحقیق و همچنین روابط موجود محاسبه عمق بحرانی کانال دوزنقه‌ای ارائه شده است. همچنین در شکل ۲، توزیع مقادیر قدر مطلق خطای نسبی روابط محاسبه λ تحقیق حاضر و در شکل ۳ توزیع مقادیر قدر مطلق خطای نسبی روابط محاسبه λ توسط محققان پیشین ارائه شده است. بررسی فرم رابطه (۲۰)، ترکیب پارامتر ϕ با توان‌های مشخص بر اساس آنالیز ابعادی، نشان داد که رابطه A بیشترین دقت (با متوسط قدر مطلق خطای نسبی برابر ۰/۳۱۴ درصد و شاخص کارایی برابر ۰/۹۹۵) را با سه تکرار پارامتر ϕ و توان‌های مشخص دارد. در این رابطه، حداکثر خطای مشاهده شده برابر ۱/۷۳۸ درصد محاسبه شد. مطابق شکل ۲ در رابطه A، توزیع مقادیر خطا روند نوسانی داشته و در سه موقعیت به حداقل رسیده است، اما از مقدار $\lambda = 8$ به بعد روند افزایشی مشخصی نشان می‌دهد. خطای قابل قبول این رابطه، بیانگر توانایی تحلیل آنالیز ابعادی در استخراج روابط پدیده‌های هیدرولیکی است.

در ادامه، سری ریاضی توانی (رابطه ۲۱ به صورت ترکیب پارامتر ϕ با توان و ضرائب نامشخص) بررسی شد. در حالت سه تکرار پارامتر ϕ ، رابطه B با متوسط قدر مطلق خطای نسبی برابر ۰/۱۷۳ درصد، شاخص کارایی برابر ۰/۹۹۷ و حداکثر خطای نسبی برابر ۲/۱۶۱ درصد به عنوان بهترین رابطه معرفی گردید. مطابق شکل ۲، توزیع خطای نسبی این رابطه نشان می‌دهد که در محدوده $0.25 < \lambda$ ، مقدار خطای نسبی رابطه B زیر ۰/۵ درصد قرار دارد و نسبت به روابط A، C و D عملکرد بهتری در برآورد عمق بحرانی دارد.

در این سری ریاضی توانی، حالت دوتکرار سری به صورت رابطه C با متوسط قدر مطلق خطای نسبی برابر ۰/۲۵۰ درصد، شاخص کارایی برابر ۰/۹۹۸ و حداکثر خطای نسبی برابر ۲/۱۱۲ درصد به دست آمد. در رابطه C، متوسط قدر مطلق خطای نسبی نسبت به رابطه B حدود ۴۴ درصد افزایش یافته است، اما شاخص کارایی و حداکثر خطای نسبی دو رابطه اختلاف محسوسی نشان نمی‌دهد.

بررسی تکرارهای مختلف سری رابطه (۲۲) نشان داد که در حالت دوتکرار سری، رابطه D با متوسط قدر مطلق خطای نسبی برابر ۰/۲۹۴ درصد، شاخص کارایی برابر ۰/۹۹۷ و حداکثر خطای نسبی برابر ۲/۴۸۹ درصد به دست آمد. در روابط C و D، توزیع مقادیر خطا روند تقریباً مشابهی داشته و در محدوده $1.5 < \lambda$ ، مقدار خطای نسبی زیر ۰/۲۵ باقی مانده است (شکل ۲).

در ادامه، حالت سه تکرار سری نیز بررسی شد که رابطه E با مقدار متوسط قدر مطلق خطای نسبی برابر ۰/۰۷۸ درصد، شاخص کارایی برابر ۰/۹۹۹ و حداکثر خطای نسبی برابر ۰/۹۸۸ درصد

با در نظر گرفتن دبی کانال دوزنقه‌ای ABCD برابر Q، در این صورت دبی جریان در مثلث COD (Q'') برابر است با:

$$Q'' = Q + Q' \quad (25)$$

بر اساس رابطه کلی عمق بحرانی در کانال مثلثی، رابطه عمق بحرانی مثلث COD برابر است با:

$$y_c' = \left(\frac{2\alpha Q m^2}{g m^2} \right)^{1/5} \quad (26)$$

در نتیجه با محاسبه پارامتر y_c'' به صورت:

$$y_c'' = y_c' - h = y_c' - \frac{b}{2m} \quad (27)$$

می‌توان رابطه‌ای به فرم زیر برای محاسبه عمق بحرانی کانال دوزنقه‌ای (y_c) به دست آورد:

$$\frac{y_c}{y_c''} = f\left(\frac{Q''}{Q}\right) \quad (28)$$

با کمک نرم‌افزارهای مرتبط و مقادیر تولید شده ϕ به ازای λ و با در نظر گرفتن محدوده کاربردی مقادیر m و b مطابق جدول ۱، می‌توان فرم‌های مختلف روابط از قبیل خطی، توانی، لگاریتمی و ... را بررسی و ضرائب مربوط را با دقت مناسب به دست آورد. در بخش تعیین دقت روابط، دو پارامتر شاخص کارایی (NSE) و قدر مطلق خطای نسبی (ARE) به ترتیب از روابط زیر استفاده شد:

$$NSE (\%) = 1 - \frac{\sum |(\lambda^* - \lambda')|}{\sum |(\lambda^* - \bar{\lambda})|} \quad (29)$$

$$ARE (\%) = \left| \frac{\lambda^* - \lambda'}{\lambda^*} \right| \times 100 \quad (30)$$

در این روابط، λ^* مقادیر واقعی، $\bar{\lambda}$ میانگین مقادیر واقعی و λ' مقادیر محاسبه شده توسط روابط مورد بررسی است. مطابق رابطه (۲۹)، هرچقدر مقدار NSE محاسبه شده توسط روابط مورد بررسی به عدد یک نزدیک‌تر باشد، دقت آن رابطه بیشتر خواهد بود. براساس رابطه (۳۰)، مقادیر حداکثر قدر مطلق خطای نسبی و متوسط قدر مطلق خطای نسبی برای هر رابطه محاسبه و گزارش شد.

جدول ۱- محدوده تغییرات پارمترهای هندسی کانال دوزنقه‌ای

Table 1. Range of geometric parameters of the trapezoidal channel

پارامتر	حداقل	حداکثر
شیب جانبی دیواره کانال دوزنقه‌ای (m)	۱	۳
عرض کف کانال دوزنقه‌ای (b ، متر)	۰/۵	۵
λ	> 0.5	$10 \geq$

۳- نتایج و بحث

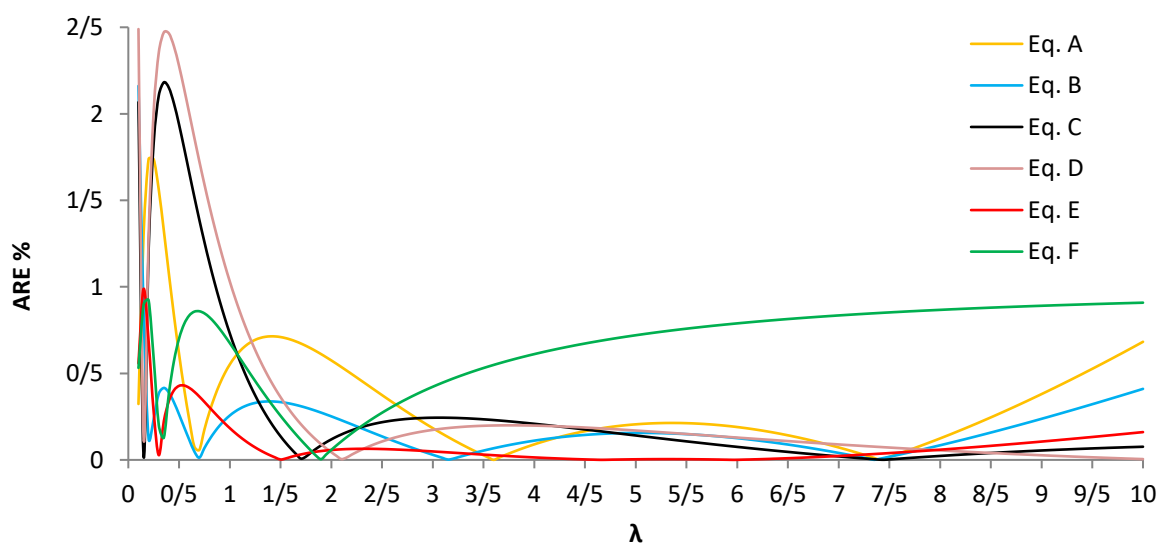
در جدول ۲ نتایج متوسط قدر مطلق خطای نسبی (ARE%)، حداکثر خطای نسبی (MARE%) و شاخص کارایی (NSE) برای روابط

جدول ۲- دقت روابط ارائه شده در این تحقیق در مقایسه با روابط موجود برای محاسبه عمق بحرانی کانال دوزنقه‌ای

Table 2. The accuracy of the equations proposed in this study compared to existing equations for calculating the critical depth of a trapezoidal channel

شاخص کارایی NSE	حداکثر قدرمطلق خطای نسبی MARE%	متوسط قدرمطلق خطای نسبی ARE%	فرم رابطه	نام رابطه
۰/۹۹۹	۰/۱۱۸	۰/۰۳۲	$\lambda = (1 + 4\phi^{\frac{2}{3}}(1 + 4\phi^{\frac{2}{3}}(1 + 4\phi^{\frac{2}{3}})^{0.2})^{1/6})^{0.5}$	Wang (1998)
۰/۹۹۹	۰/۰۲۹	۰/۰۱۰	$\lambda = (1 + 4.644\phi^{2/3}(1 + 0.655\phi^{0.694})^{0.374})^{0.432}$	Vatankhah (2013)
۰/۹۷۵	۱/۴۵۷	۱/۰۷۱	$\lambda = (1 + 4\phi^{\frac{2}{3}}(1 + 4\phi^{\frac{2}{3}}(1 + 4\phi^{\frac{2}{3}})^{1/6})^{1/6})^{0.5}$	Varandili (2019) et al.
۰/۹۹۸	۰/۱۸۰	۰/۱۰۶	$\lambda = (1 + 3.901\phi^{2/3}(1.433 + 4.084\phi^{2/3})^{0.3175})^{0.4566}$	Chen (2025)
۰/۹۹۵	۱/۷۳۸	۰/۳۱۴	$\lambda = -2.971\phi^{\frac{1}{3}} + 4.425\phi^{\frac{2}{5}} - 0.741\phi^{\frac{1}{2}} + 0.056$	رابطه A
۰/۹۹۷	۲/۱۶۱	۰/۱۷۳	$\lambda = 5.09\phi^{0.17} - 8.87\phi^{0.21} + 4.55\phi^{0.31}$	رابطه B
۰/۹۹۸	۲/۱۸۲	۰/۲۵۰	$\lambda = -1.029\phi^{0.0971} + 1.327\phi^{0.3872} + 0.482$	رابطه C
۰/۹۹۷	۲/۴۸۹	۰/۲۹۴	$\lambda = (\phi^{0.0976} + 0.412)(\phi^{0.3045} - 1.154) + 1$	رابطه D
۰/۹۹۹	۰/۹۸۸	۰/۰۷۸	$\lambda = (\phi^{0.0755} + 0.438)(\phi^{0.291} - 1.136)(\phi^{0.027} - 0.032) + 0.975$	رابطه E
۰/۹۸۵	۰/۹۲۲	۰/۶۶۲	$\frac{y_c}{y_c''} = 0.64Ln\left(\frac{Q''}{Q}\right) + 1.01$	رابطه F

تحقیق
حاضر



شکل ۲- توزیع مقادیر قدرمطلق خطای نسبی روابط محاسبه λ ارائه شده در این تحقیق

Fig 2. Distribution of absolute values of relative error of equations presented by currwnt research

مطابق شکل ۲، توزیع خطای نسبی این رابطه نشان می‌دهد که در محدوده $\lambda > 0.25$ ، مقدار خطای نسبی رابطه E زیر ۰/۵ درصد قرار دارد و نسبت به دیگر روابط ارائه شده در این تحقیق، در بازه مورد بررسی λ ، خطای کمتری در برآورد عمق بحرانی دارد.

در نتایج بررسی روش دو مثلث با فرم کلی رابطه (۲۸)، مشاهده شد که رابطه نیمه‌لگاریتمی F با فرم ساده، متوسط قدر مطلق خطای

استخراج گردید. این نتیجه نشان‌دهنده کاهش قابل توجه خطا در رابطه E است و این رابطه به عنوان بهترین رابطه این سری معرفی شد. مقایسه دقت سری روابط ارائه شده A تا E نشان می‌دهد که رابطه E با کمترین متوسط قدر مطلق خطای نسبی و حداکثر خطای نسبی و بالاترین مقدار شاخص کارایی، بهترین رابطه برای تخمین عمق بحرانی کانال دوزنقه‌ای است.

این سه رابطه در کل محدوده مورد بررسی λ کمتر از ۰/۲ درصد است که بیانگر عملکرد خوب این آن ها می باشد.

مقایسه شاخص های ارزیابی رابطه E (ارائه شده در این تحقیق با فرم سه تکرار سری) نشان می دهد که این رابطه در رتبه چهارم تخمین عمق بحرانی کانال دوزنقه ای قرار دارد. همچنین با مقایسه عملکرد رابطه (Chen (2025) و رابطه E مشاهده می شود که متوسط قدر مطلق خطای نسبی رابطه E نسبت به رابطه (Chen (2025) در حدود ۳۶ درصد کمتر بوده و شاخص کارایی تقریباً یکسانی دارند؛ این موضوع نشان دهنده توانایی مناسب رابطه E در تخمین عمق بحرانی کانال دوزنقه ای است.

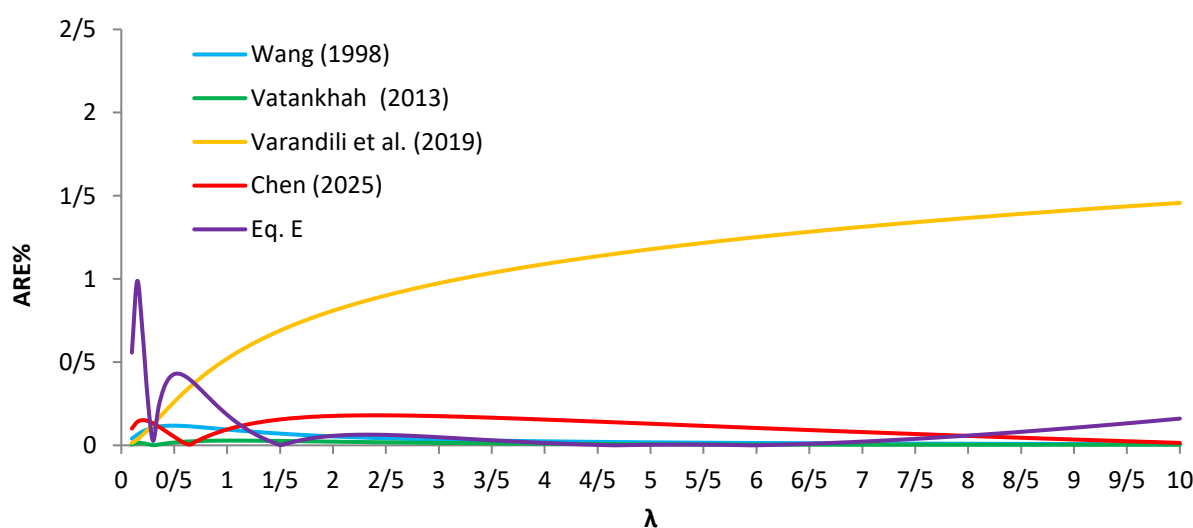
در رابطه Varandili et al. (2019) با فرم دوتکرار پارامتر ϕ ، متوسط قدر مطلق خطای نسبی بالا بود (حدود ۹/۶۵۶ درصد)؛ بنابراین، فرم سه تکرار آن نیز بررسی و دقت آن گزارش شد. در حالت سه تکرار پارامتر ϕ ، متوسط قدر مطلق خطای نسبی برابر ۱/۰۷۱ درصد، شاخص کارایی برابر ۰/۹۷۵ و حداکثر خطای نسبی برابر ۱/۴۵۷ درصد به دست آمد که بر این اساس، این رابطه در بین روابط محققان پیشین و روابط ارائه شده در این تحقیق، در رتبه آخر قرار گرفت. مطابق شکل ۳، توزیع خطای نسبی این رابطه نشان می دهد که مقادیر خطای نسبی در محدوده $1 > \lambda$ بین ۰/۵ تا ۱/۵ درصد است و عملکرد ضعیف آن را در مقایسه با روابط محققان پیشین و روابط ارائه شده در این تحقیق آشکار می سازد.

لازم به ذکر است که در بررسی روابط موجود و ارائه روابط جدید، فرم روابط با حداقل تعداد تکرار در پارامتر ϕ مدنظر بود و طبیعتاً افزایش تکرار پارامتر ϕ در برخی روابط، دقت را افزایش می داد.

نسبی، شاخص کارایی و حداکثر خطای نسبی به ترتیب برابر ۰/۶۶۲ درصد، ۰/۹۸۵ و ۰/۹۲۲ درصد دارد و از دقت مناسبی در تخمین عمق بحرانی کانال دوزنقه ای برخوردار است. با مقایسه نتایج شاخص های ارزیابی رابطه E و F مشاهده می شود که اگرچه شاخص کارایی و حداکثر خطای نسبی این دو رابطه تقریباً به یکدیگر نزدیک است، اما مقدار متوسط خطای نسبی رابطه F نسبت به رابطه E قابل توجه می باشد. مطابق شکل ۲، توزیع خطای نسبی این رابطه نشان می دهد که مقادیر خطای نسبی این رابطه در عمده محدوده λ بین ۰/۵ تا یک درصد قرار دارد؛ این موضوع در مقدار متوسط خطای نسبی رابطه F کاملاً مشهود است.

مقایسه عملکرد روابط ارائه شده توسط محققان قبلی نشان می دهد که رابطه (Vatankhah (2013) با متوسط قدر مطلق خطای نسبی برابر ۰/۰۱۰ درصد، شاخص کارایی برابر ۰/۹۹۹ و حداکثر خطای نسبی برابر ۰/۰۲۹ درصد، بیشترین دقت را در بین روابط مورد بررسی دارد. رابطه (Wang (1998) در فرم سه تکرار سری با متوسط قدر مطلق خطای نسبی برابر ۰/۰۳۱ درصد، شاخص کارایی برابر ۰/۹۹۹ و حداکثر خطای نسبی برابر ۰/۱۱۸ درصد، پس از رابطه (Vatankhah (2013)، در رتبه دوم عملکرد قرار می گیرد. در ادامه، رابطه (Chen (2025) نیز با متوسط قدر مطلق خطای نسبی برابر ۰/۱۰۷ درصد، شاخص کارایی برابر ۰/۹۹۸ و حداکثر خطای نسبی برابر ۰/۱۸۰ درصد در رتبه سوم جای دارد.

فرم کلی روابط (Vatankhah (2013)، Wang (1998) و (Chen (2025) تقریباً مشابه یکدیگر است، با این تفاوت که دو رابطه (Vatankhah (2013) و رابطه (Chen (2025) به صورت دوتکرار سری هستند. مطابق شکل ۳، توزیع خطای نسبی روابط (Vatankhah (2013)، Wang (1998) و (Chen (2025) نشان می دهد که مقادیر خطای نسبی



شکل ۳- توزیع مقادیر قدر مطلق خطای نسبی روابط محاسبه λ ارائه شده توسط محققین قبلی

Fig 3. Distribution of absolute values of relative error of equations presented by previous researchers

ارائه نمونه‌های کاربردی

برای ارزیابی عملکرد روابط محققان پیشین و روابط ارائه‌شده در این تحقیق در تخمین عمق بحرانی، از مشخصات کانال بتنی واقعی مطابق جدول ۳ (Elhakeem, 2017) استفاده شد و نتایج ارزیابی دقت روابط در جدول ۴ ارائه گردید.

محاسبات با فرض $g = 9.806 \text{ m/s}^2$ و $\cos\theta = 1$ و $\alpha = 1$ انجام شد. با توجه به متوسط قدر مطلق خطای نسبی مثال‌های مورد

جدول ۳- مشخصات هندسی و هیدرولیکی کانال‌های مورد بررسی

Table 3. Geometric and hydraulic characteristics of the investigated channels

نام کانال	عرض کف $b(m)$	شیب دیواره m	دبی کانال $Q(m^3.s^{-1})$	عمق بحرانی $y_c(m)$
Madera-2	۳/۰۵	۱/۲۵	۲۸/۳۷	۱/۶۴۱
Roza-1	۳/۶۶	۱/۲۵	۳۶/۸۸	۱/۷۶۹
Roza-2	۴/۲۷	۱/۲۵	۶۲/۴۲	۲/۲۳۲
East Low	۶/۱۰	۱/۵۰	۱۲۷/۶۸	۲/۸۰۴

جدول ۴- قدر مطلق خطای نسبی روابط ارائه شده در این تحقیق در مقایسه با روابط موجود برای محاسبه عمق بحرانی کانال دوزنقه‌ای

Table 4. Absolute relative error of the equations proposed in this research compared to existing equations for calculating the critical depth of the trapezoidal channel

نام رابطه	Wang (1998)	Vatankhah (2013)	Varandili et al. (2019)	Chen (2025)	رابطه A	رابطه B	رابطه C	رابطه D	رابطه E	رابطه F
نام کانال										
Madera-2	۰/۱۱۳	۰/۰۲۵	۰/۳۶۵	۰/۰۱۳	۰/۰۱۴	۰/۰۲۰	۱/۴۶۰	۱/۸۰۰	۰/۳۸۲۰	۰/۸۷۱
Roza-1	۰/۱۱۶	۰/۰۲۲	۰/۳۲۶	۰/۰۱۱	۰/۲۲۰	۰/۱۱۱	۱/۶۴۹	۱/۹۹۲	۰/۴۱۵۰	۰/۸۴۸
Roza-2	۰/۱۱۴	۰/۰۲۴	۰/۳۵۴	۰/۰۰۶	۰/۰۶۸	۰/۰۴۵	۱/۵۴۲	۱/۸۵۴	۰/۳۹۲	۰/۸۶۸
East Low	۰/۱۱۲	۰/۰۲۵	۰/۳۷۴	۰/۰۱۸	۰/۰۳۱	۰/۰۰۲	۱/۴۱۵	۱/۷۵۴	۰/۳۷۲	۰/۸۷۰
متوسط قدر مطلق خطای نسبی (ARE)	۰/۱۱۴	۰/۰۲۴	۰/۳۵۵	۰/۰۱۲	۰/۰۸۳	۰/۰۴۴	۱/۵۱۷	۱/۸۵۰	۰/۳۹۰	۰/۸۶۴

۴- نتیجه‌گیری نهایی

در این تحقیق، به منظور محاسبه عمق بحرانی در کانال دوزنقه‌ای، روابط مختلفی با استفاده از روش آنالیز ابعادی، سری-های ریاضی و روش دو مثلث ارائه شد و دقت و عملکرد آن‌ها در مقایسه با روابط موجود محققان پیشین ارزیابی گردید. در استخراج روابط جدید و ارزیابی روابط موجود، سعی شد روابط با حداقل تکرار سری ریاضی مورد استفاده قرار گیرد و نتایج با کمک شاخص‌های ارزیابی شامل متوسط قدر مطلق خطای نسبی، شاخص کارایی و حداکثر خطای نسبی مقایسه شد.

در میان روابط پیشنهادی این تحقیق، روابط A، B و E با متوسط قدر مطلق خطای نسبی به ترتیب برابر ۰/۳۱۴، ۰/۱۷۳ و ۰/۰۷۸ درصد و شاخص کارایی به ترتیب برابر ۰/۹۹۵، ۰/۹۹۷ و ۰/۹۹۹، عملکرد مناسبی در تخمین عمق بحرانی کانال دوزنقه‌ای

نشان دادند. لازم به ذکر است که در بین این سه رابطه مذکور، رابطه E با کمترین متوسط قدر مطلق خطای نسبی و همچنین کمترین مقدار حداکثر خطای نسبی مقدار (۰/۹۸۸ درصد) بهترین عملکرد را داشت. مقدار حداکثر خطای نسبی رابطه F نیز تقریباً با این رابطه مشابه بود، اما متوسط قدر مطلق خطای نسبی رابطه F در مقایسه با رابطه E بیشتر بود.

در میان روابط محققان پیشین، رابطه (2013) Vatankhah با متوسط قدر مطلق خطای نسبی برابر ۰/۰۱۰ درصد و شاخص کارایی ۰/۹۹۹، بهترین عملکرد را در تخمین عمق بحرانی داشت و روابط (1998) Wang و (2025) Chen با متوسط قدر مطلق خطای نسبی به ترتیب برابر ۰/۰۳۲ و ۰/۱۰۷ درصد، در رتبه‌های دوم و سوم قرار داشتند. رابطه E، پیشنهادی در این تحقیق با فرم سه تکرار سری توانی و با متوسط قدر مطلق خطای نسبی

- Vatankhah AR, and Easa SM, 2011. Explicit solutions for critical and normal depths in channels with different shapes. *Flow Measurement and Instrumentation*, 22(1), 43–49, doi.org/10.1016/j.flowmeasinst.2010.12.003.
- Vatankhah AR, Kouchakzadeh S, 2007. Discussion of exact equations for critical depth in a trapezoidal canal. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 133(5), 508, [doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9437\(2007\)133:5\(508\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9437(2007)133:5(508)).
- Wang ZZ, 1998. Formula for calculating critical depth of trapezoidal open channel. *Journal of Hydraulic Engineering*, 124(1), 90–91, [doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1998\)124:1\(90\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1998)124:1(90)).
- برابر ۰/۰۷۸ درصد، عملکرد قابل‌رقابتی در مقایسه با روابط محققان پیشین، به‌ویژه رابطه (2025) Chen از خود نشان داد.
- نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که بررسی فرم‌های مختلف سری‌های توانی ریاضی می‌تواند کمک شایانی به استخراج روابط تخمین عمق بحرانی با فرم ساده و دقت مناسب نماید.
- ### منابع
- Akan AO, and Iyer SS, 2021. *Open Channel Hydraulics* (2nd edition). Butter worth Heinemann, Oxford.
- Arvanaghi H, Mahtabi G, and Rashidi M, 2015. New solutions for estimation of critical depth in trapezoidal cross section channel. *Journal of Materials and Environmental Science*, 6(9), 2453–2460.
- Chen C, 2025. Novel method for calculating flow depth in open channels combining the iteration theory and the curvefitting technique. *International Journal of Agricultural and Biological Engineering*, 18(4), 190–194, doi.org/10.25165/j.ijabe.20251804.9037.
- Das A, 2007. Flooding probability constrained optimal design of trapezoidal channels. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 133(1), 53–60, [doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9437\(2007\)133:1\(53\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9437(2007)133:1(53)).
- Elhakeem M, 2017. Explicit solution for flow depth in open channels of trapezoidal cross-sectional area: classic problem of interest. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 143(7), 04017011, [doi.org/10.1061/\(ASCE\)IR.1943-4774.0001179](https://doi.org/10.1061/(ASCE)IR.1943-4774.0001179).
- French RH, 1987. *Open-channel hydraulics*. New York: McGraw-Hill.
- Swamee PK, 1993. Critical depth equations for irrigation canals. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 119(2), 400–409, [doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9437\(1993\)119:2\(400\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9437(1993)119:2(400)).
- Salmasi F. (2020). Critical depth of trapezoidal open channel using explicit formula and ANN approach. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering*, 44 (3): 1023-1029, doi.org/10.1007/s40996-020-00416-7
- Varandili SA, Arvanaghi H, Ghorbani MA, and Yassen ZM, 2019. A novel and exact analytical model for determination of critical depth in trapezoidal open channels. *Flow Measurement and Instrumentation*, 68, 101575, doi.org/10.1016/j.flowmeasinst.2019.101575.
- Vatankhah AR, 2013. Explicit solutions for critical and normal depths in trapezoidal and parabolic open channels. *Ain Shams Engineering Journal*, 4(1), 17–23, doi.org/10.1016/j.asej.2012.05.002.